Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit

Elke Warmuth

Humboldt-Universität Berlin

Sommersemester 2010

1. Empirisches Gesetz der großen Zahlen
   - Lehrbuchbeispiele
   - Auswertung von Beobachtungen
2. Schätzen einer unbekannten Wahrscheinlichkeit
   - Modell für relative Häufigkeit
   - Güte der Schätzung
   - $1/\sqrt{n}$-Gesetz
3. Zufällige Schwankungen bei seltenen Ereignissen

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Die Erfahrung zeigt: Nach einer großen Zahl von Versuchen ändert sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses durch weitere Versuche nur noch wenig.

...

Die relative Häufigkeit nach einer großen Zahl von Beobachtungen ist ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

- viele reale Erscheinungen weisen *statistische Regelmäßigkeit* auf
- *Erfahrungstatsache* – nicht beweisbar
- *Modellebene*: „Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen“

A. N. Kolmogorow (1933) in §2 Das Verhältnis zur Erfahrungswelt:

Den Ereignissen A werden Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ zugeordnet mit folgenden Eigenschaften:

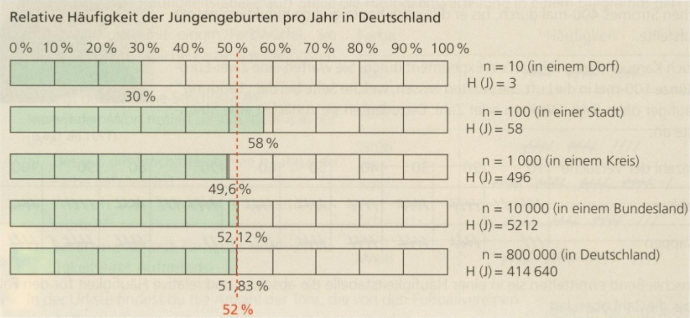
I. Man kann praktisch sicher sein, dass bei einer großen Anzahl von Wiederholungen des Vorgangs die relative Häufigkeit von A sich nur wenig von $P(A)$ unterscheiden wird.

II. Wenn $P(A)$ sehr klein ist, dann kann man praktisch sicher sein, dass A bei einmaliger Beobachtung des Vorgangs nicht eintreten wird.

Was heißt „praktisch sicher“ und „nur wenig“????

Wird ein Zufallsversuch sehr oft durchgeführt, so lässt sich feststellen: Die relativen Häufigkeiten für das Eintreten eines Ereignisses schwanken um eine feste Zahl. Diese feste Zahl wird die **Wahrscheinlichkeit** des Eintretens des Ereignisses E genannt und entweder als Bruch oder in Prozent angegeben.

Beispiel:
In der Bundesrepublik Deutschland werden in einem Jahr mehr Jungen als Mädchen geboren.



Die relative Häufigkeit eines Ereignisses E in einem Zufallsexperiment stellt einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses dar. Je größer die Anzahl der Wiederholungen des Experimentes ist, desto geringer schwankt die relative Häufigkeit um die Wahrscheinlichkeit.

Quelle: Mathematik, Lehrbuch für die Klasse 8 Realschule/Gesamtschule Brandenburg, Paetec, 2003, S. 188

Beim Glücksrad Fig. 1 wird der Zeiger gedreht. Es hängt vom Zufall ab, wo er stehen bleibt. Es können die **Ereignisse** „blau“, „gelb“ und „grün“ auftreten. Da die Hälfte der Kreisscheibe blau ist, erwartet man bei Wiederholungen dieses **Zufallsversuchs** etwa bei der Hälfte aller Drehungen das **Ergebnis** „blau“. Für die Ergebnisse „gelb“ und „grün“ erwartet man jeweils den Anteil $\frac{1}{4}$, also etwa in ein Viertel der Drehungen.
Man sagt: Die **Wahrscheinlichkeit** für „blau“ beträgt $\frac{1}{2}$ und die Wahrscheinlichkeit für „gelb“ und „grün“ jeweils $\frac{1}{4}$. Bei 200 Drehungen erwartet man, dass das Ergebnis „blau“ etwa 100-mal und die Ergebnisse „gelb“ und „grün“ je etwa 50-mal auftreten.
Die nebenstehende Tabelle zeigt die Ergebnisse einer solchen Versuchsreihe. Die **beobachteten Häufigkeiten** stimmen hier fast mit den **erwarteten Häufigkeiten** überein.

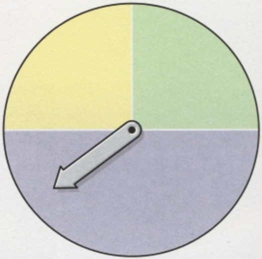


Fig. 1

Farbe	blau	gelb	grün
erwarteter Anteil	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Bei 200 Versuchen:

Farbe	blau	gelb	grün
erwartete Häufigkeit	100	50	50
beobachtete Häufigkeit	107	38	55

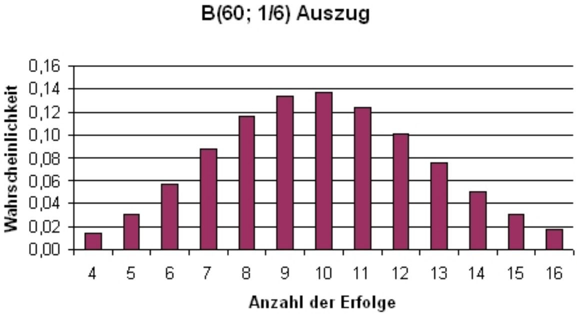
Quelle: Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasien, Ausgabe A, Ernst Klett Verlag, 2007, S. 182

- Ereignis und Ergebnis!
- Was heißt „erwartet man“?
- „stimmen ... fast überein“?

Die Wahrscheinlichkeit gibt an, welchen Anteil man für ein bestimmtes Ergebnis bei vielen Wiederholungen eines Zufallsversuchs erwartet.
Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Spielwürfel eine „2“ zu würfeln, beträgt $\frac{1}{6}$.
Wenn man 60-mal würfelt, erwartet man etwa 10-mal eine „2“.

Quelle: Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasien, Ausgabe A, Ernst Klett Verlag, 2007, S. 182

Was heißt: „erwartet man?“



800 „fortlaufende" Geburten im Krankenhaus Berlin Kaulsdorf 1990

	n=20		n=100		n=200		n=400		n=800	
Nr.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.
1	11	0,55								
2	11	0,55								
3	12	0,60	51	0,51						
4	7	0,35								
5	10	0,50			104	0,52				
6	11	0,55								
7	6	0,30								
8	11	0,55	53	0,53						
9	14	0,70								
10	11	0,55					200	0,50		
11	9	0,45								
12	8	0,40								
13	14	0,70	49	0,49						
14	10	0,50								
15	8	0,40			96	0,48				
16	6	0,30								
17	8	0,40								
18	13	0,65	47	0,47						
19	10	0,50								
20	10	0,50							**428**	**0,54**
21	10	0,50								
22	10	0,50								
23	10	0,50	47	0,47						
24	8	0,40								
25	9	0,45			107	0,54				
26	8	0,40								
27	13	0,65								
28	13	0,65	60	0,60						
29	14	0,70								
30	12	0,60					228	0,57		
31	9	0,45								
32	13	0,65								
33	9	0,45	54	0,54						
34	11	0,55								
35	12	0,60			121	0,61				
36	15	0,75								
37	15	0,75								
38	13	0,65	67	0,67						
39	12	0,60								
40	12	0,60								

H. FREUDENTHAL: „Ein heutzutage viel abgeschriebenes Beispiel ist auch das Werfen eines Reißnagels. Ich weiß nicht, ob die Verfasser, die es empfehlen, es auch ausprobiert haben. Ich versuchte es einmal, aber nach einigen Versuchen und ein bißchen Nachdenken wurde mir klar, daß das Experiment von zu vielen und unbeherrschbaren Faktoren abhängt, um aufschlußreiche Resultate zu liefern. Es hängt da viel von der Art des Werfens ab und auf die Dauer wird sogar ein fester Experimentator in seiner Wurftätigkeit Schwankungen zeigen. Es ist übrigens kaum nötig, darauf hinzuweisen, daß dieses Zufallsexperiment selber kaum motiviert und als Idee höchst naiv ist.“

Quelle: H. Freudenthal: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff als angewandte Mathematik. In: Les applications nouvelles de mathematiques et de l'Enseignement secondaire, Bericht des 3. CIEM-Seiminars in Echternach, 1973, Luxemburg, 1975, 15-27 (zitiert nach g. v. Harten; H. Steinbring: Stochastik in der Sekundarstufe I, Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG, 1984)

Schätzen einer unbekannten Wahrscheinlichkeit

- Im Rahmenplan in Klasse 7/8 verlangt, aber ohne Quantifizierung.
- Hintergrundwissen:
  - Ereignis A – Erfolg, z.B. A – Ziehen einer roten Kugel, Ziehen eines A-Wählers
  - $P(A) = p$ unbekannt, z.B. Anteil der roten Kugeln, Anteil der A-Wähler, Anteil der Nichraucher, ...
  - X_n – Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Beobachtungen des Vorgangs

Modell für das Schätzen

- $X_n \sim B(n, p)$
  (auch bei (relativ kleinen) Stichproben **ohne** Zurücklegen aus großen Grundgesamtheiten!)
- $h_n = \frac{X_n}{n}$ – relative Häufigkeit von A bei n Versuchen
- h_n dient als Schätzwert für das unbekannte p.

- studieren Verteilung der **Zufallsgröße** h_n in Abhängigkeit von n bei festem (zunächst bekannten) p
- untersuchen im Modell Eigenschaften der Schätzgröße

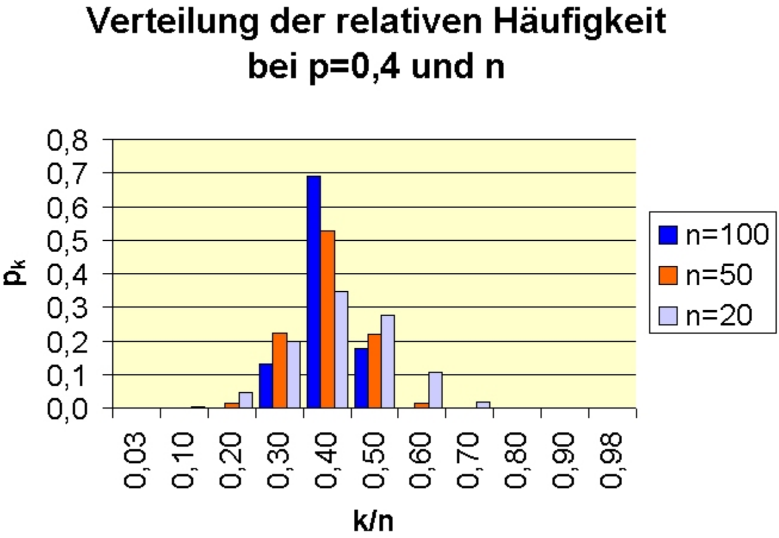
Verteilung der relativen Häufigkeit (Modell)

$$P\left(h_n = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Wählen $p = 0,4$ und $n = 20, 50$ und 100.

- Klasseneinteilung:

  $[0; 0,05), [0,05; 0,15), [0,15; 0,25), \ldots, [0,85; 0,95), [0,95; 1]$
- „Zusammenziehen“ der Verteilung auf den Wert 0,4.
- große Abweichungen immer möglich, Chancen dafür sinken mit wachsendem n


Verteilung der relativen Häufigkeit
bei p=0,4 und n
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
pk
0,03
0,10
0,20
0,30
0,40
0,50
0,60
0,70
0,80
0,90
0,98
k/n
n=100
n=50
n=20

Güte der Schätzung

$$P(|h_n - p| \leq \varepsilon) \geq 1 - \alpha$$

Stichprobenumfang n, Genauigkeit ε und Sicherheit $1 - \alpha$ hängen zusammen:

ε fest:	Je größer n, desto größer $1 - \alpha$
$1 - \alpha$ fest:	Je größer n, desto kleiner ε
n fest:	Je kleiner ε, desto kleiner $1 - \alpha$.

Kenngrößen:

- $E(h_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n \cdot p}{n} = p$
- $Var(h_n) = Var\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$

aus dem Grenzwertsatz von DE MOIVRE-LAPLACE folgt:

$\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz

Für große n (Faustregel $np(1-p) > 9$) gilt

$$P\left(|h_n - p| \leq k\sqrt{p(1-p)}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx \begin{cases} 0,683 & k=1 \\ 0,954 & k=2 \\ 0,997 & k=3 \end{cases}$$

Wenn man n Versuche macht, muss man mit Abweichungen der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ von der erwarteten relativen Häufigkeit der Erfolge rechnen.

$\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$P\left(|h_n - p| \leq k\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \geq\approx \begin{cases} 0,683 & k=1 \\ 0,954 & k=2 \\ 0,997 & k=3 \end{cases}$$

$k = 2:$ $$P\left(|h_n - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq\approx 0,954$$

Merkregel

Bei n unabhängigen Versuchen unterscheidet sich die relative Häufigkeit $h_n(A)$ eines Ereignisses A von der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ mit einer Sicherheit von mindestens 95% höchstens um $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Beispiele:

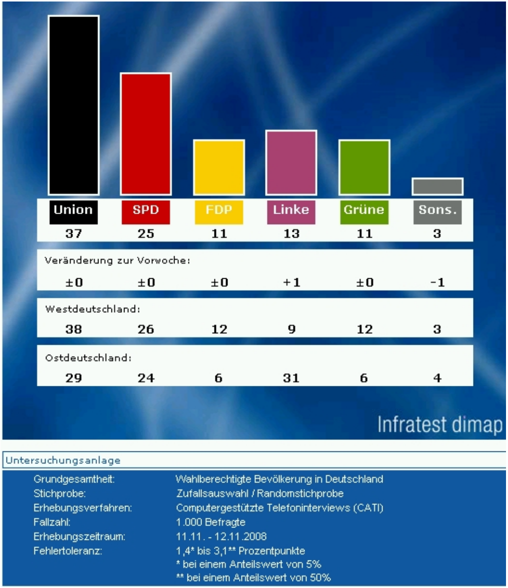
n	20	100	200	400	800	2000
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	0,22	0,10	0,07	0,05	0,04	0,02

Zurück zu den Babydaten

- Jungenanteil der Geburten in Deutschland betrug: 0,513
- verwenden dies als Schätzwert für $p = P(\text{Junge})$

n	20	100	200	400	800
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	0,22	0,10	0,07	0,05	0,04
maximale Abweichung von p	0,24	0,16	0,10	0,06	0,03

- Eine relative Jungen-Häufigkeit von 0,75 bei 20 Geburten ist eine **signifikante** Abweichung vom erwarteten Wert 0,513 auf dem Siginifikanzniveau 5%.
  Dasselbe gilt für 0,61 bei 200 Geburten.



Quelle: `www.infratest-dimap.de/?id=9`, 27.11.2008, 12.30 Uhr

Untersuchungsanlage	
Grundgesamtheit:	Wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland
Stichprobe:	Zufallsauswahl / Randomstichprobe
Erhebungsverfahren:	Computergestützte Telefoninterviews (CATI)
Fallzahl:	1.000 Befragte
Erhebungszeitraum:	11.11. - 12.11.2008
Fehlertoleranz:	1,4* bis 3,1** Prozentpunkte
	* bei einem Anteilswert von 5%
	** bei einem Anteilswert von 50%

$$P\left(|h_n - p| \leq 2\sqrt{p(1-p)}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx 0,954$$

$n = 1000$ und $p = 0,50$ liefern $\varepsilon = 0,0316$

$n = 1000$ und $p = 0,05$ liefern $\varepsilon = 0,0138$

Gesetz der großen Zahlen

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

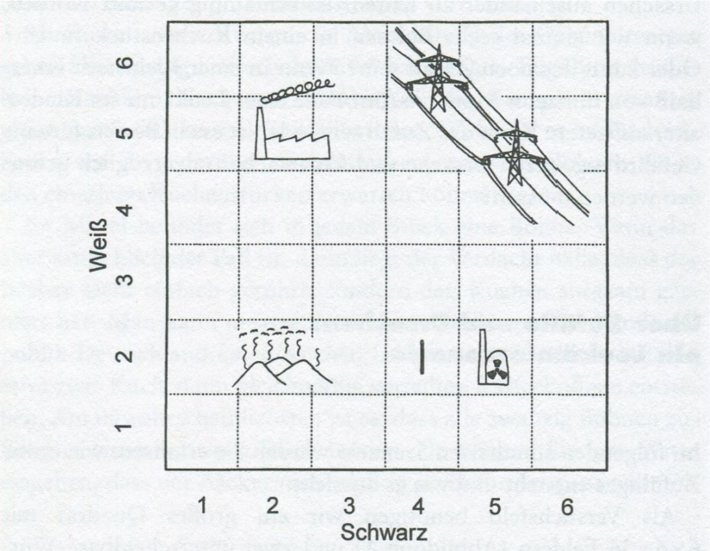
$$\lim_{n \to \infty} P(|h_n - p| > \varepsilon) = 0. \quad (*)$$

In Worten: Zu jeder festen Genauigkeit kann man durch entsprechend großen Stichprobenumfang jede beliebige Sicherheit $0 < 1 - \alpha < 1$ garantieren.

- statt Standardsicherheiten beliebige Sicherheiten.
- $\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz ist aussagekräftiger und fasslicher.

Wie etwas Zufälliges entsteht und wie es aussieht.

Quelle: H.-H. Dubben/ H.-P. Beck-Bornholdt: Der Hund, der Eier legt. Hamburg: Rowohlt, 2007, S. 31-39.



<table>
<tr><td rowspan="7">g
e
l
b</td><td>6</td><td>|</td><td>|</td><td></td><td>||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>|</td><td>||</td><td>|</td><td>|</td><td>||</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td>||</td><td>|</td><td>||</td><td>|</td></tr>
<tr><td>3</td><td>|</td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>|</td><td>||</td></tr>
<tr><td>2</td><td>|</td><td>|</td><td>||</td><td></td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>1</td><td>|</td><td>||</td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>||</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="7">weiß</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="7">g
e
l
b</td><td>6</td><td>||</td><td>|</td><td>||</td><td>|</td><td></td><td>|</td></tr>
<tr><td>5</td><td>|</td><td></td><td>|</td><td>|</td><td>||</td><td>||</td></tr>
<tr><td>4</td><td>|||</td><td>|</td><td></td><td>||</td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>||</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>||</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>||</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>||</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>||</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="7">weiß</td></tr>
</table>

- Man „erwartet“ bei 36 Würfen auf jedem Feld einen Strich.
- Es lohnt sich, selbst zu erleben, was wirklich passiert.
- Was erwartet man sonst noch?
  - Wie viele Felder mit 1, 2, 3, ... Strichen?
  - Wie lange dauert es, bis kein Feld mehr leer ist?

- N_1 – Anzahl der Felder mit genau einem Treffer
- Hilfsgrößen F_k mit

$$F_k = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \text{Feld } k \text{ genau einen Treffer hat} \\ 0 & \qquad\quad \text{sonst} \end{cases}$$

  Anzahl der Treffer im k-ten Feld ist binomialverteilt gemäß $B(36; \frac{1}{36})$, also

  $P(F_k = 1) = \binom{36}{1} \cdot \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{35} \approx 0,37$
- Zufallsgrößen $F_1, F_2, \ldots, F_{36}$ sind **abhängig**
- $N_1 = F_1 + F_2 + \cdots + F_{36}$ und
  $E(N_1) = E(F_1) + (F_2) + \cdots + E(F_{36}) \approx 13$

- analog $N_0, N_1, N_2, \ldots$

	N_0	N_1	N_2	N_3
Erwartungswerte:	13	13	7	2
beobachtet 1. Serie:	9	18	9	0
beobachtet 2. Serie:	12	13	10	1

- Warten auf die vollständige Serie $\rightarrow$ beim Thema Simulation